[redacted]

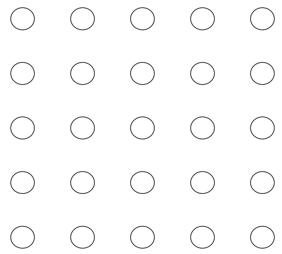
Mit Erläuterungen zur Ableitung der Formeln
von *Dr. Volker Bangert*

Berlin, 11.03.2010

Inhaltsverzeichnis

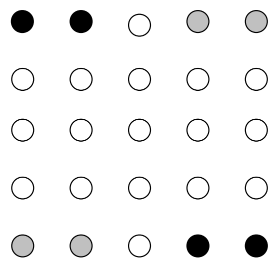
	Seite
Einleitung	3
1. <u>Anzahl der möglichen Quadrate (Formeln als **Reihen**)</u> A: Anzahl möglicher gerader Quadrate B: Anzahl möglicher schräger Quadrate C: Anzahl möglicher diagonaler Quadrate D: Gesamte Anzahl möglicher Quadrate	3
2. <u>Anzahl der möglichen Quadrate (Formeln als **Kurzformeln**)</u> A: Anzahl möglicher gerader Quadrate B: Anzahl möglicher schräger Quadrate C: Anzahl möglicher diagonaler Quadrate D: Gesamte Anzahl möglicher Quadrate	5
3. <u>Berechnung der Differenzen</u> A: Formeln für die Erste Differenz B: Formeln für die Zweite Differenz C: Formeln für die Dritte Differenz	7
4. Deduktive Formeln	9
5. Zusammenfassung der Formeln	10
6. <u>Zahlenfolgen als **Tabellen**:</u> Anzahl möglicher Quadrate für ein Spielbrett mit n*n Feldern und die Differenzen (Zahlenwerte)	11
7. <u>Zahlenfolgen als **Kurven**:</u> Anzahl möglicher Quadrate für ein Spielbrett mit n*n Feldern	12

Fragestellung



Bei der Fragestellung wird von n*n Feldern ausgegangen, die mit gleichen Abständen quadratisch angeordnet sind. Nebenstehend ist ein Beispiel zu sehen mit n*n = 5*5 Feldern. Werden vier dieser Felder mit Linien verbunden, entsteht ein Viereck. Einige dieser möglichen Vierecke sind Quadrate. Beispiele sind auf der nächsten Seite zu sehen (Einleitung).

Die allgemeine Frage ist, wie viele Quadrate sich insgesamt auf einer Anordnung von n*n Feldern (n beliebig) bilden lassen. Dabei kann außerdem unterschieden werden in gerade, diagonale und schräge Quadrate (siehe Einleitung). Die Frage nach der möglichen Zahl der Quadrate wird beantwortet durch die Herleitung von Formeln, mit denen bei Vorgabe einer beliebigen ganzen Zahl n die Gesamtzahl der möglichen Quadrate und auch die Anzahl der geraden, diagonalen bzw. der schrägen Quadrate errechnet werden kann. Die Fragestellung ist von allgemeinem mathematischem bzw. geometrischem Interesse.



Angeregt wurden diese Betrachtungen durch das Brettspiel „Mondrago“, dass der Künstler Adrian Schacker (Berlin) erfunden hat (www.mondrago.net). Es ist ein Spiel mit zwei Parteien. Es wird auf einem Spielbrett mit n*n = 5*5 Feldern gespielt. Jede Partei hat vier Spielsteine. In nebenstehender Abbildung ist die Anfangsstellung der Spielsteine zu sehen.

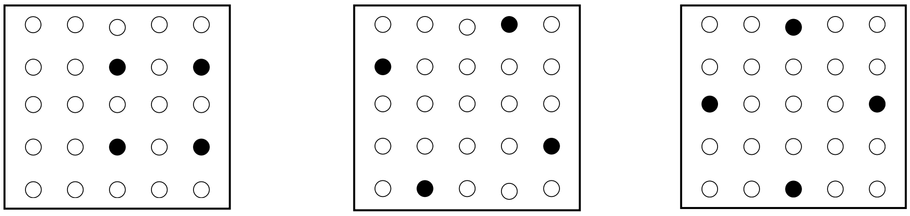
Es wird abwechselnd mit einem der vier Steine gezogen, und zwar auf ein beliebiges angrenzendes Feld (geradeaus oder schräg). Der Spieler, der mit seinen vier Steinen zuerst ein Quadrat („Mondrago“) bildet, hat gewonnen.

[illegible]

auf einem [illegible] Spielbrett mit [illegible] Spielfeldern

Einleitung

Auf einem Mondrago-Spielbrett mit n*n Feldern können drei Arten von Quadraten gebildet werden: Gerade, schräge und diagonale Quadrate. (Hier das Beispiel n*n = 5*5):



m_n (gesamt) ist die Gesamtzahl der möglichen Quadrate auf einem Spielbrett mit n*n Feldern. m_n (gesamt) ist die Summe der geraden, schrägen und diagonalen Quadrate:

m_n (gesamt) = m_n (gerade) + m_n (schräg) +m_n (diagonal)

Durch Auszählen der Anzahl der möglichen Quadrate für das Spielbrett mit n*n = 5*5 Feldern (n=5) ergeben sich insgesamt 50 mögliche Quadrate:

m_n (gesamt) = 50, wobei
m_n (gerade) = 30
m_n (schräg) = 10
m_n (diagonal) = 10.

Es sollen nun Formeln gefunden werden, mit denen die Anzahl der möglichen Quadrate durch Einsetzen von n in die Formeln bestimmt wird, und nicht durch Auszählen der Quadrate. Wenn diese Formeln ermittelt sind, kann jedes beliebige n eingesetzt werden, um die Anzahl möglicher Quadrate für ein Spielfeld mit n*n Spielfeldern (n beliebig) zu berechnen.

1. Anzahl der möglichen Quadrate (Formeln als Reihen)

Bestimmung der Formeln als Reihen

Eine Reihe ist eine Summe aus aufeinander folgenden Gliedern.

A: <u>**Anzahl** möglicher **gerader** Quadrate auf einem Spielbrett mit n*n Spielfeldern:</u>
Beispiel: n*n = 5*5, also **n = 5**

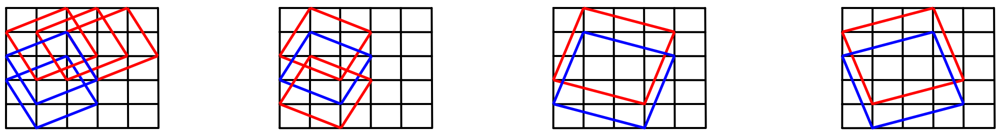
ganz kleine Quadrate	kleine Quadrate	große Quadrate	Ganz große Quadrate
$4*4 = (n-1)^2$	$3*3 = (n-2)^2$	$2*2 = (n-3)^2$	$1*1 = (n-4)^2$

m_5 (gerade) = $(n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + (n-4)^2$ für n = 5

Allgemein:
m_n (gerade) = $(n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + (n-4)^2 \ldots\ldots\ldots + (n-(n-1))^2$ für beliebiges n

B: <u>**Anzahl** möglicher **schräger** Quadrate auf einem Spielbrett mit n*n Spielfeldern:</u>

Beispiel: n*n = 6*6, also **n = 6**



kleine rechts gerichtet $3*3 = (n-3)^2$

kleine links gerichtet $3*3 = (n-3)^2$

große rechts gerichtet $2*2 = (n-4)^2$

große links gerichtet $2*2 = (n-4)^2$

m_6 (schräg) = $(n-3)^2 + (n-3)^2 + (n-4)^2 + (n-4)^2$ für n = 6

$= 2*(n-3)^2 + 2*(n-4)^2$

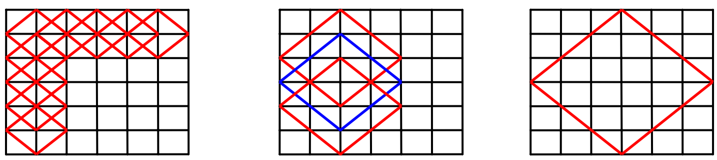
Allgemein:

m_n (schräg) $= 2*(n-3)^2 + 2*(n-4)^2 + 2*(n-5)^2 + \ldots\ldots\ldots 2*(n-(n-1))^2$ für beliebiges n

C: <u>**Anzahl** möglicher **diagonaler** Quadrate auf einem Spielbrett mit n*n Spielfeldern:</u>

Fall C1: n ist ungerade

Beispiel: n*n = 7*7, also **n = 7**



ganz kleine Quadrate $5*5 = (n-2)^2$

kleine Quadrate $3*3 = (n-4)^2$

große Quadrate $1*1 = (n-6)^2$

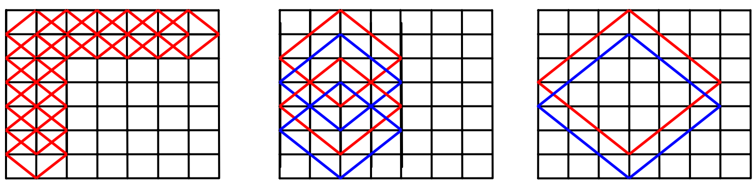
m_7 (diagonal für ungerades n) = $(n-2)^2 + (n-4)^2 + (n-6)^2$ für n = 7

Allgemein:

m_n (diagonal für <u>ungerades</u> **n)** $= (n-2)^2 + (n-4)^2 + (n-6)^2 \ldots\ldots + (n-(\mathbf{n-1}))^2$ für beliebiges n

Fall C2: n ist gerade

Beispiel: n*n = 8*8, also **n = 8**



ganz kleine Quadrate $6*6 = (n-2)^2$

kleine Quadrate $4*4 = (n-4)^2$

große Quadrate $2*2 = (n-6)^2$

m_8 (diagonal für gerades n) = $(n-2)^2 + (n-4)^2 + (n-6)^2$ für n = 8

Allgemein:

m_n (diagonal für <u>gerades</u> **n)** $= (n-2)^2 + (n-4)^2 + (n-6)^2 \ldots\ldots + (n-(\mathbf{n-2}))^2$ für beliebiges n

D: <u>**Gesamte** Anzahl möglicher Quadrate auf einem Spielbrett mit n*n Spielfeldern:</u>

m_n (gesamt) = m_n (gerade) + m_n (schräg) +m_n (diagonal)

m_n (gesamt für <u>ungerades</u> n**)** = $1*(n-1)^2 + 2*(n-2)^2 + 3*(n-3)^2 + 4*(n-4)^2$
$+ 3*(n-5)^2 + 4*(n-6)^2 + 3*(n-7)^2 + 4*(n-8)^2 \ldots\ldots + \mathbf{4*}(n-(n-1))^2$

m_n (gesamt für <u>gerades</u> n**)** = $1*(n-1)^2 + 2*(n-2)^2 + 3*(n-3)^2 + 4*(n-4)^2$
$+ 3*(n-5)^2 + 4*(n-6)^2 + 3*(n-7)^2 + 4*(n-8)^2 \ldots\ldots + \mathbf{3*}(n-(n-1))^2$

Erläuterungen zum „Abbruchglied“ (Beispiele):

Das Abbruchglied bei m_n (diagonal für ungerades n**)** ist $(n-(n-1))^2$ **= 1** .
Das gilt für beliebiges n, denn $(n-(n-1))^2 = (n-n+1)^2 = 1^2 = 1$.

Das Abbruchglied bei m_n (diagonal für gerades n**)** ist $(n-(n-2))^2$ **= 4** .
Das gilt für beliebiges n, denn $(n-(n-2))^2 = (n-n+2)^2 = 2^2 = 4$.

2. Anzahl der möglichen Quadrate (Formeln als Kurzformeln)

Bestimmung der Formeln als kurze Ausdrücke durch Anwendung von Formeln für Reihen

Für Reihen, die ja Summen mehrerer Glieder sind, gibt es Formeln, mit denen der Wert einer Reihe (die Summe) auf verkürzte Art und Weise berechnet werden kann.

A: <u>**Anzahl** möglicher **gerader** Quadrate auf einem Spielbrett mit n*n Spielfeldern:</u>

m_n (gerade) $= (n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-(n-3))^2 + (n-(n-2))^2 + (n-(n-1))^2$
$= (n-(n-1))^2 + (n-(n-2))^2 + (n-(n-3))^2 \ldots\ldots\ldots + (n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2$
$= 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots\ldots + (n-1)^2$

Formel 1: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Mit Hilfe der Formel 1 ergibt sich aus der Reihen-Formel für gerade Quadrate:

m_n (gerade) = $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

B: <u>**Anzahl** möglicher **schräger** Quadrate auf einem Spielbrett mit n*n Spielfeldern:</u>

m_n (schräg) $= 2*(n-3)^2 + 2*(n-4)^2 + 2*(n-5)^2 + \ldots\ldots\ldots 2*(n-(n-1))^2$
$= 2*[(n-3)^2 + (n-4)^2 + (n-5)^2 + \ldots\ldots\ldots (n-(n-1))^2]$
$= 2*[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-5)^2 + (n-4)^2 + (n-3)^2]$

Formel 1: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Mit Hilfe der Formel 1 ergibt sich aus der Reihen-Formel für schräge Quadrate:

m_n (schräg) = $\frac{(n-2)(n-3)(2n-5)}{3}$

C: <u>**Anzahl** möglicher **diagonaler** Quadrate auf einem Spielbrett mit n*n Spielfeldern:</u>

m_n (diagonal für <u>ungerades</u> n**)** $= (n-2)^2 + (n-4)^2 + (n-6)^2 \ldots\ldots + (n-(n-3))^2 + (n-(\mathbf{n-1}))^2$
$= 1^2 + 3^2 + 5^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (n-6)^2 + (n-4)^2 + (n-2)^2$

Formel 2: $\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 \ldots\ldots.. + (n-6)^2 + (n-4)^2 + (n-2)^2$ (n <u>ungerade</u>)

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Mit Hilfe der Formel 2 ergibt sich aus der Reihen-Formel für diagonale Quadrate:

m_n (diagonal für <u>ungerades</u> n**) =** $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

m_n (diagonal für <u>gerades</u> n**)** $= (n-2)^2 + (n-4)^2 + (n-6)^2 \ldots\ldots + (n-(n-4))^2 + (n-(\mathbf{n-2}))^2$
$= 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 \ldots\ldots\ldots + (n-6)^2 + (n-4)^2 + (n-2)^2$

Formel 3: $\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(2k)^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 \ldots\ldots.. + (n-6)^2 + (n-4)^2 .+ (n-2)^2$ (n <u>gerade</u>)

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Mit Hilfe der Formel 3 ergibt sich aus der Reihen-Formel für diagonale Quadrate:

m_n (diagonal für <u>gerades</u> n**) =** $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Die so errechneten Formeln für m_n (diagonal für <u>ungerades</u> n**)** und für m_n (diagonal für <u>gerades</u> n**)** sind gleich. Deshalb gilt generell

m_n (diagonal) = $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ für beliebiges n.

D: <u>**Gesamte** Anzahl möglicher Quadrate auf einem Spielbrett mit n*n Spielfeldern:</u>

m_n (gesamt) = m_n (gerade) + m_n (schräg) +m_n (diagonal)

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{(n-2)(n-3)(2n-5)}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

m_n (gesamt) = $\frac{7n(n^2+11)}{6}$ **-** $6\,n^2$ -10

Die Anzahl m_n der möglichen geraden, schrägen und diagonalen Quadrate bzw. aller möglichen Quadrate (gesamt) ergibt mit aufsteigendem n vier Folgen von Zahlen, die in *Kapitel 6* in einer Tabelle aufgelistet sind (Siehe auch „Mondrago Zahlenfolgen gerade schräg diagonal gesamt Tabelle.doc“).

Für jede der vier Zahlenfolgen wird nun die Differenz d_n der aufeinander folgenden Zahlen gebildet ($d_n = m_n - m_{n-1}$). Daraus ergeben sich vier neue Zahlenfolgen („Erste Differenz“). Wird für jede der vier Zahlenfolgen wieder die Differenz aufeinander folgender Zahlen gebildet („Zweite Differenz“, $dd_n = d_n - d_{n-1}$), und von den sich so ergebenden Zahlenreihen wieder die Differenz aufeinander folgender Zahlen ($ddd_n = dd_n - dd_{n-1}$), so ergibt sich, dass ddd_n bei allen vier Zahlenfolgen eine *konstante* Zahl ist (2, 4, 1 bzw. 7).

3. Berechnung der Differenzen

A: Formeln für die Erste Differenz

d_n = [Anzahl möglicher Quadrate auf einem Spielbrett mit **n*n** Spielfeldern]
minus [Anzahl möglicher Quadrate auf einem Spielbrett mit **(n-1)*(n-1)** Spielfeldern]
Diese Differenz wird als „Erste Differenz“ bezeichnet.

$d_n = m_n - m_{n-1}$

Gerade Quadrate:
d_n (gerade) = m_n (gerade) - m_{n-1} (gerade)

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)((n-1)-1)(2(n-1)-1)}{6}$$

d_n (gerade) = $(n-1)^2$

Schräge Quadrate:
d_n (schräg) = m_n (schräg) - m_{n-1} (schräg)

$$= \frac{(n-2)(n-3)(2n-5)}{3} - \frac{((n-1)-2)((n-1)-3)(2(n-1)-5)}{3}$$

d_n (schräg) = $2*(n-3)^2$

Diagonale Quadrate:
d_n (diagonal) = m_n (diagonal) - m_{n-1} (diagonal)

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{(n-1)((n-1)-1)((n-1)-2)}{6}$$

d_n (diagonal) = $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Alle Quadrate:
d_n (gesamt) = m_n (gesamt) - m_{n-1} (gesamt)

$$= \frac{7n(n^2+11)}{6} - 6\,n^2 - 10 - \left[\frac{7(n-1)((n-1)^2+11)}{6} - 6\,(n-1)^2 - 10\right]$$

d_n (gesamt) = $\frac{n(7n-31)}{2} + 20$

B: Formeln für die Zweite Differenz

$dd_n = d_n - d_{n-1}$ ist die Differenz der aufeinander folgenden Ersten Differenzen und wird „Zweite Differenz“ genannt.

Gerade Quadrate:
dd_n (gerade) = d_n (gerade) - d_{n-1} (gerade)

$$= (n-1)^2 - ((n-1)-1)^2$$

dd_n (gerade) = $2n - 3$

Schräge Quadrate:
dd_n (schräg) = d_n (schräg) - d_{n-1} (schräg)

$= 2*(n-3)^2 - 2*((n-1)-3)^2$

dd_n (schräg) = 2*(2n-7)

Diagonale Quadrate:
dd_n (diagonal) = d_n (diagonal) - d_{n-1} (diagonal)

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{((n-1)-1)((n-1)-2)}{2}$$

dd_n (diagonal) = n-2

Alle Quadrate:
dd_n (gesamt) = d_n (gesamt) - d_{n-1} (gesamt)

$$= \frac{n(7n-31)}{2} + 20 - \left[\frac{(n-1)(7(n-1)-31)}{2} + 20 \right]$$

dd_n (gesamt) = 7 n -19

C: Formeln für die Dritte Differenz

$ddd_n = dd_n - dd_{n-1}$
ist die Differenz der aufeinander folgenden Zweiten Differenzen und wird „Dritte Differenz“ genannt.

Gerade Quadrate:
ddd_n (gerade) = dd_n (gerade) - dd_{n-1} (gerade)

$= (2n-3) - (2(n-1)-3)$

ddd_n (gerade) = 2

Schräge Quadrate:
ddd_n (schräg) = dd_n (schräg) - dd_{n-1} (schräg)

$= 2*(2n-7) - 2*(2(n-1)-7)$

ddd_n (schräg) = 4

Diagonale Quadrate:
ddd_n (diagonal) = dd_n (diagonal) - dd_{n-1} (diagonal)

$= n-2 -((n-1)-2)$

ddd_n (diagonal) = 1

Alle Quadrate:
ddd_n (gesamt) = dd_n (gesamt) - dd_{n-1} (gesamt)

$= 7n - 19 - (7(n-1)-19)$

ddd_n (gesamt) = 7

4. Deduktive Formeln

Die Anzahl möglicher Quadrate für ein Spielbrett mit n*n Spielfeldern wird *direkt* errechnet durch die Eingabe der Zahl n in die „**Direkten**“ **Formeln** (siehe *Kapitel 2 oder 5*).

Die unten angegebenen „**Deduktiven**“ **Formeln** ermöglichen die Berechnung der Anzahl möglicher Quadrate $m_{\mathbf{n}}$ durch Verwendung des Vorgängers $m_{\mathbf{n-1}}$.

Wurde die Anzahl möglicher Quadrate $m_{\mathbf{n-1}}$ für ein Spielbrett mit (n-1)*(n-1) Feldern bereits berechnet, so kann die Anzahl möglicher Quadrate $m_{\mathbf{n}}$ für das Spielbrett mit n*n Feldern in schneller Weise *deduktiv* berechnet werden durch Hinzuaddieren kurzer Glieder, die durch Einsetzen von n bestimmt werden.

Die deduktiven Formeln ergeben sich aus der Gleichung $d_n = m_{\mathbf{n}} - m_{\mathbf{n-1}}$ (siehe *Kapitel 3 A*, „Erste Differenz“). Denn es gilt

$m_n = m_{n-1} + d_n$, woraus folgt:

m_n (gerade) = m_{n-1} (gerade) + $(n-1)^2$

m_n (schräg) = m_{n-1} (schräg) + $2*(n-3)^2$

m_n (diagonal) = m_{n-1} (diagonal) + $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

m_n (gesamt) = m_{n-1} (gesamt) + $\frac{n(7n-31)}{2} + 20$

Außerdem gilt die folgende Formel:
m_{n+2} (schräg) = 2* m_n (gerade)

5. Zusammenfassung der Formeln aus *Kapitel 2 und 3*

Die Formeln auf einen Blick

$\mathbf{m_n}$ (gesamt) = m_n (gerade) + m_n (schräg) + m_n (diagonal)

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{(n-2)(n-3)(2n-5)}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$m_n \text{ (gesamt)} = \frac{7n(n^2+11)}{6} - 6\,n^2 - 10$$

Definition: $d_n = m_n - m_{n-1}$

$\mathbf{d_n}$ (gesamt) = d_n (gerade) + d_n (schräg) + d_n (diagonal)

$$= (n-1)^2 + 2*(n-3)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$d_n \text{ (gesamt)} = \frac{n(7n-31)}{2} + 20$$

Definition: $dd_n = d_n - d_{n-1}$

$\mathbf{dd_n}$ (gesamt) = dd_n (gerade) + dd_n (schräg) + dd_n (diagonal)

= 2n – 3 + 2*(2n – 7) + n – 2

dd_n (gesamt) = 7 n - 19

Definition: $ddd_n = dd_n - dd_{n-1}$

$\mathbf{ddd_n}$ (gesamt) = ddd_n (gerade) + ddd_n (schräg) + ddd_n (diagonal)

= 2 + 4 + 1

ddd_n (gesamt) = 7

6. **Zahlenfolgen** als Tabellen**:**

Anzahl möglicher Quadrate für ein Spielbrett mit n*n Feldern und die Differenzen (Zahlenwerte)

Gerade Quadrate				
n	m_n	d_n	dd_n	ddd_n
1	0			
2	1	1		
3	5	4	3	
4	14	9	5	2
5	30	16	7	2
6	55	25	9	2
7	91	36	11	2
8	140	49	13	2
9	204	64	15	2
10	285	81	17	2
11	385	100	19	2
12	506	121	21	2

Schräge Quadrate				
n	m_n	d_n	dd_n	ddd_n
1				
2	0			
3	0	0		
4	2	2	2	
5	10	8	6	4
6	28	18	10	4
7	60	32	14	4
8	110	50	18	4
9	182	72	22	4
10	280	98	26	4
11	408	128	30	4
12	570	162	34	4

Diagonale Quadrate				
n	m_n	d_n	dd_n	ddd_n
1	0			
2	0	0		
3	1	1	1	
4	4	3	2	1
5	10	6	3	1
6	20	10	4	1
7	35	15	5	1
8	56	21	6	1
9	84	28	7	1
10	120	36	8	1
11	165	45	9	1
12	220	55	10	1

Alle Quadrate (gesamt)				
n	m_n	d_n	dd_n	ddd_n
1				
2	1			
3	6	5		
4	20	14	9	
5	50	30	16	7
6	103	53	23	7
7	186	83	30	7
8	306	120	37	7
9	470	164	44	7
10	685	215	51	7
11	958	273	58	7
12	1296	338	65	7

Alle Zahlenwerte m_n wurden auf den Spielbrettern mit n*n Feldern ausgezählt. Sie stimmen mit den Werten überein, die sich aus den Formeln ergeben.

(Siehe auch „Mondrago Zahlenfolgen gerade schräg diagonal gesamt Tabelle.doc“)

Es ist auffällig, dass die

$$\text{Erste Differenz } d_n \text{ (gerade)} = m_n \text{ (gerade)} - m_{n-1}\text{(gerade)}$$

eine Zahlenfolge ist, die aus der Aufeinanderfolge der Quadratzahlen besteht:
1, 4, 9, 16, 25, 36, 64, 81, 100, usw.

Diese Tatsache ist überraschend, wird jedoch bestätigt durch die Formel

$$d_n \text{ (gerade)} = (n-1)^2.$$

7. **Zahlenfolgen** als Kurven:
Anzahl möglicher Quadrate für ein Spielbrett mit n*n Feldern

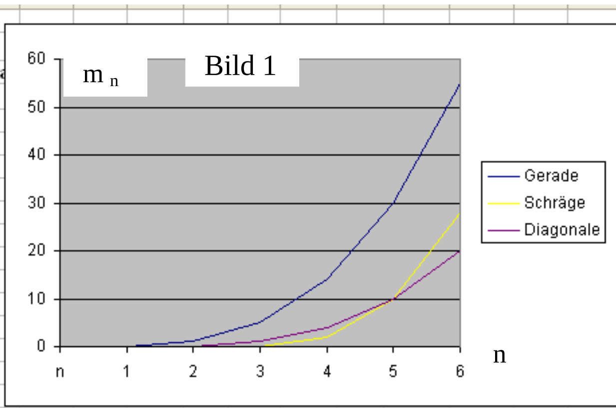
(Siehe dazu auch „Mondrago Zahlenreihen als Kurven gerade schräg diagonal gesamt.xls“). Der Verlauf der Kurven in Bild 1 bis 4 wird weiter unten erläutert.

MONDRAGO Spielfeld mit n*n Feldern

m_n=Anzahl möglicher Quadrate

	Gerade	Schräge	Diagonale	Alle Quadra
n	m_n	m_n	m_n	m_n
1	0		0	
2	1	0	0	1
3	5	0	1	6
4	14	2	4	20
5	30	10	10	50
6	55	28	20	103
7	91	60	35	186
8	140	110	56	306
9	204	182	84	470
10	285	280	120	685
11	385	408	165	958

Schnittpunkte



n=5 Anzahl schräge überholt Anzahl diagonale Quadr.

n=10 Anzahl schräge überholt Anzahl gerade Quadrate

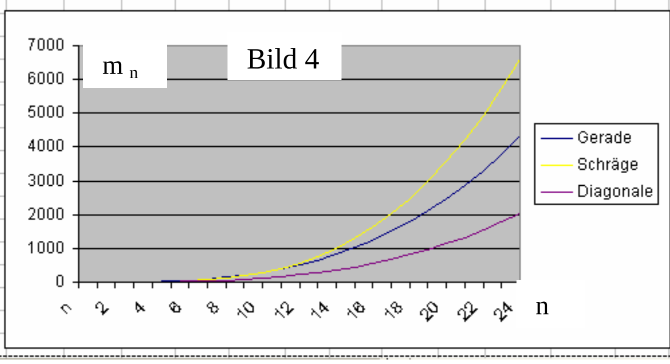
Anzahl diagonale ist immer kleiner als Anzahl gerade Quadrate

Fortsetzung folgende Seite:
"Beginn" und weiterer Verlauf der Kurven

	Gerade	Schräge	Diagonale
n	m_n	m_n	m_n
1	0		0
2	1	0	0
3	5	0	1
4	14	2	4
5	30	10	10
6	55	28	20
7	91	60	35
8	140	110	56
9	204	182	84
10	285	280	120
11	385	408	165
12	506	570	220
13	650	770	286
14	819	1012	364
15	1015	1300	455
16	1240	1638	560
17	1496	2030	680
18	1785	2480	816
19	2109	2992	969
20	2470	3570	1140
21	2870	4218	1330
22	3311	4940	1540
23	3795	5740	1771
24	4324	6622	2024

Achtung! Andere Farben!

Jeweils die ersten Quadrate bei n = 2, 3 bzw. 4
Beginn der "wirklichen" Kurven bei n = 1, 2 bzw. 3



Erläuterung zu den Bildern:

Bild 3 zeigt, dass das erste gerade Quadrat auf einem Spielbrett mit n*n = 2*2 Spielfeldern gebildet werden kann (blaue Kurve, n = 2, m_n = 1), und dass das erste diagonale Quadrat auf einem Spielbrett mit n*n = 3*3 Feldern gebildet werden kann (gelbe Kurve, n = 3, m_n = 1). Dieser Umstand wird durch die rote wagerechte Linie angezeigt. Die ersten zwei schrägen Quadrate können auf einem Spielbrett mit n*n = 4*4 Spielfeldern gebildet werden (lila Kurve, n = 4, m_n = 2).

Bild 3 zeigt außerdem, dass sich bei n = 3 fünf gerade Quadrate bilden lassen (blaue Kurve, n = 3, m_n = 5), und bei n = 4 vier diagonale Quadrate (gelbe Kurve, n = 4, m_n = 4).

Bild 1 zeigt, dass es Anfangs mehr diagonale (lila Kurve) als schräge Quadrate gibt (gelbe Kurve) und am meisten gerade Quadrate (blaue Kurve). Bei n = 5 gibt es dann genau so viele diagonale wie schräge Quadrate, nämlich 10, und 30 gerade Quadrate. Von da an (ab n = 6) gibt es dann weniger diagonale als schräge Quadrate, die Kurven schneiden sich. Noch überwiegt die Anzahl der geraden Quadrate.

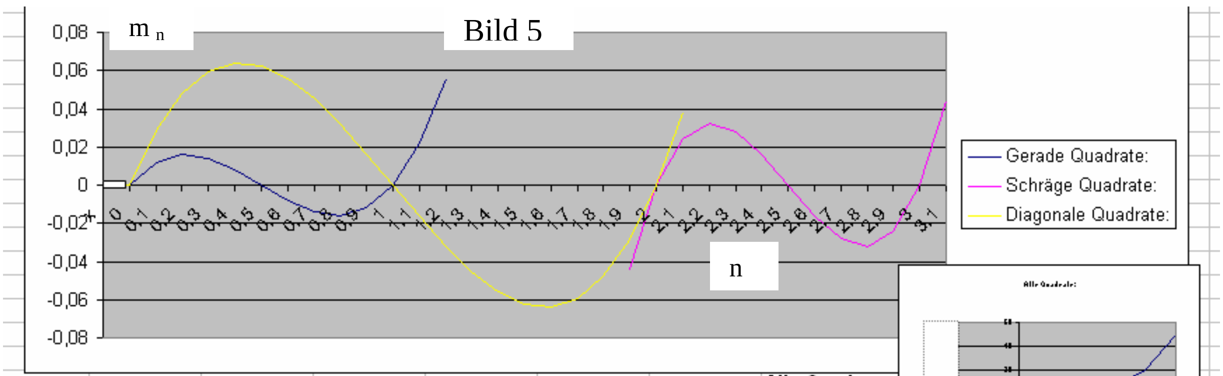
Bild 2 zeigt, dass ab n = 11 die meisten Quadrate schräge Quadrate sind. Denn die gelbe Kurve der schrägen Quadrate schneidet (überholt) die blaue Kurve der geraden Quadrate, und zwar kurz hinter n = 10.

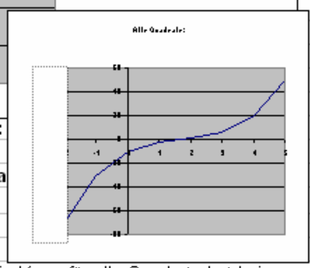
Bild 4 zeigt dann, dass es für Spielbretter ab n*n = 11 immer mehr gerade (blaue Kurve) als diagonale Quadrate (lila Kurve) gibt, und am meisten schräge Quadrate (gelbe Kurve).

Bild 5 und **Bild 6:** Kurven für n kleiner als 3

Ein reales Spielbrett müsste mindestens n*n = 4*4 bzw. n*n = 5*5 Spielfelder haben. Bei n*n = 3 gibt es lediglich 5 gerade, 1 diagonales und noch kein schräges Quadrat, das ermöglicht kein Mondrago-Spiel, ebenso ist es mit einem n*n = 2*2 Spielfeld. Die Werte n = 1 bzw n = 0 ergeben überhaupt kein Spielfeld. Es ist also nur von akademischem Interesse, wie die Kurven im Bereich von n = 0 und n = 3 verlaufen. Um die Kurven in diesem Bereich von n darzustellen, wurden auch Zwischenwerte von n in die Formeln eingesetzt (n = 0,1 0,2 0,3……1,1 1,2 usw.), zu sehen in **Bild 5**.

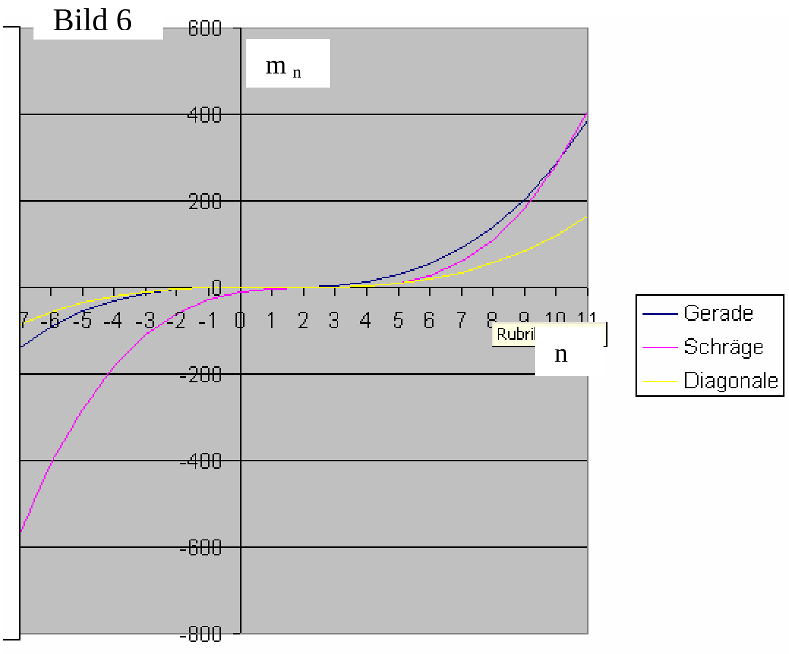
(Siehe auch „Mondrago Zahlenfolgen Kurven ger schr diag Quadr n kleiner 3.xls“).





				Alle Quadrate:		
	Gerade Quadrate:		Schräge Quadrate:		Diagonale Qua	
x	m_n	x	m_n	x	m_n	
0	0	0		0	0,000	
0,1	0,012	0,1		0,1	0,029	
0,2	0,016	0,2		0,2	0,048	Die Kurve für alle Quadrate hat kein
0,3	0,014	0,3		0,3	0,060	Minimum oder Maximum. Sie schneidet
0,4	0,008	0,4		0,4	0,064	die x-Achse bzw. n-Achse
0,5	0	0,5		0,5	0,063	bei x = 1,61855
0,6	-0,008	0,6		0,6	0,056	

Bei **Bild 6** wurden negative Werte für n in die Formeln eingesetzt. Auch dieser Bereich der Kurven ist nur von akademischem Interesse, denn es existiert kein Spielbrett mit n*n Spielfeldern, bei dem n negativ ist. Es ist jedoch von mathematischem Interesse, welcher Art die Kurven (Funktionen) sind, die sich aus den Formeln für die Anzahl der möglichen Mondrago-Quadrate auf einem n*n-Spielbrett ergeben. Es sind Funktionen dritten Grades (jeweils mit einem n^3-Glied).



Abschließende Bemerkung:

Das Mondrago-Spielbrett mit n*n = 5*5 Spielfeldern ist das hergebrachte MONDRAGO, das sich als herausforderndes Spiel mit echten Anforderungen an die Spieler erwiesen hat, wobei der Ausgang der Mondrago-Partie von Anfang an offen ist, und der Gewinn der Partie absolut dem Glück und der Intelligenz des Spielers anheim gestellt ist.

Es ist auf „experimentellem Wege“ zu ermitteln, ob Spielfelder mit 6*6 oder 7*7 Feldern (oder mehr) spielbar sind, oder ob bei dieser Größe des Spielfeldes der Spieler, der den ersten Zug macht, bei folgerichtigen Spielzügen das Spiel „unaufhaltsam“ gewinnen kann. Dann wären Spielfelder dieser Größe nicht sinnvoll.